

Kryteria optymalizacyjne w procedurze wykorzystującej ukryte modele Markowa do analiz danych ekonomicznych

Streszczenie: W artykule opisane zostały wyniki analiz związanych z wyborem kryterium optymalizacyjnego w procedurze doboru parametrów ukrytych modeli Markowa wykorzystywanych do identyfikacji punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego w Polsce. Pod uwagę wzięte zostały kryteria informacyjne (AIC, BIC), maksimum funkcji wiarygodności oraz częstość uzyskiwania danego zestawu parametrów w symulacjach Monte Carlo. Badanie przeprowadzono na podstawie danych pochodzących z testu koniunktury w przemyśle prowadzonym przez Instytut Rozwoju Gospodarczego Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie.

Słowa kluczowe: ukryte modele Markowa, algorytm Bauma-Welcha, algorytm Viterbiego, optymalizacja, kryteria informacyjne, test koniunktury w przemyśle

Wprowadzenie

Ocena rozwoju ogólnie pojętej sytuacji gospodarczej stanowi jedną z sił napędowych współczesnej ekonomii. Badane są zarówno determinanty jak i tempo rozwoju w odniesieniu do innych krajów. Przeprowadzane są rozległe analizy związane z różnorodnymi założeniami dotyczącymi regulacji prawnych, społecznych i finansowych¹. Budowane są mniej² lub bardziej³ złożone obliczeniowo modele ekonometryczne wykorzystujące zarówno dawno ugruntowane w teorii i praktyce, jak i nowoczesne narzędzia matematyczno-informatyczne. Niestety trudności pojawiają się już na etapie określenia aktualnego czy historycznego poziomu rozwoju. Jako jedno z podstawowych źródeł wiedzy o sytuacji gospodarczej uznawane są cykle koniunkturalne. Wiele z wykorzystywanych do analiz modeli⁴ ma charakter deterministyczny. Ze względu na stosunkowo niewielką długość dostępnych koniunkturalnych szeregów czasowych, jak również ze względu na potencjalną obecność zmiennych ukrytych w tworzonych modelach, progностyczne własności są mocno ograniczone lub obciążone znaczącymi błędami. Alternatywne rozwiązanie stanowią modele Markowa, których podstawą jest niedeterministyczny ich charakter.

¹ Porównaj np. Growiec J., *Zagregowana funkcja produkcji w ekonomii wzrostu gospodarczego i konwergencji*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2012; Świsłowska D., *Prawdopodobieństwo wystąpienia kryzysu walutowego w Polsce w warunkach integracji gospodarczej i walutowej*, [w:] Polska w Unii Europejskiej. Dynamika konwergencji ekonomicznej, J. Michałek, W. Siwiński, M. Socha (red.), PWN, Warszawa 2007; Próchniak M., Witkowski B., *Real economic convergence and the impact of monetary policy on economic growth of the EU countries: The analysis of time stability and the identification of major turning points based on the Bayesian methods*, National Bank of Poland Working Papers 2012, No. 137.

² Patrz Goczek Ł., *Przegląd i ocena ekonometrycznych metod używanych w modelach empirycznych wzrostu gospodarczego*, *Gospodarka Narodowa* 2012, vol. 10, s. 49-73.

³ Zob. np. Białowolski P., Kuszewski T., Witkowski B., *Bayesowskie uśrednianie klasycznych oszacowań w prognozowaniu wskaźników makroekonomicznych z użyciem danych z testów koniunktury*, *Prace i Materiały Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH* 2013, nr 91, s. 121-144.

⁴ Przykład w Gradzewicz M., Growiec J., Hagemeyer J., Popowski P., *Cykl koniunkturalny w Polsce - wnioski z analizy spektralnej*, *Bank i Kredyt* 2010, nr 41(5), s. 41-76.

Kryteria optymalizacyjne w procedurze wykorzystującej ukryte modele Markowa do analiz danych ekonom.

Ukryte modele Markowa, w skrócie HMM (ang. *Hidden Markov Models*), znane są również pod nazwą probabilistycznych automatów z wyjściem. Można je zdefiniować na gruncie procesów stochastycznych⁵. Stosowane z powodzeniem w wielu dziedzinach do rozwiązywania zadań, w których celem jest znalezienie nieobserwowalnego ciągu stanów na podstawie innej, znanej sekwencji danych. Do najbardziej powszechnych zastosowań należy rozpoznawanie wzorców, takich jak odręcznego pisma, gestów, mowy, sygnałów czy sekwencjonowanie DNA w bioinformatyce. Wykorzystywane są jednak również z powodzeniem do analizy danych finansowych⁶ i makroekonomicznych. Jednym z zastosowań, w którym doskonale spełniają swoją rolę, jest analiza zmian klimatu koniunktury w Polsce⁷.

Opisana w artykule procedura znalezienia stanów ukrytego łańcucha Markowa jest ze względu na swój stopień złożoności doskonałym przykładem wykorzystania znanych od lat algorytmów i dostępnej współcześnie mocy obliczeniowej komputerów do bardziej wyrafinowanej, a przede wszystkim dokładniejszej analizy badanego zjawiska. Ze względu na niedeterministyczny charakter procedury wymagana jest selekcja odpowiednich kryteriów wyboru oraz weryfikacji uzyskiwanych w kolejnych losowaniach wyników. Celem badania była odpowiedź na pytanie, które kryterium należy przyjąć w badanej procedurze oraz jaki wpływ na jakość uzyskanego rozwiązania ma dobór tego kryterium.

Wyniki zawarte w artykule stanowią kolejny krok do automatyzacji analizy danych o charakterze ekonomicznym. Opracowanie wiarygodnych procedur identyfikacji stanów ukrytych łańcuchów Markowa pozwoli bowiem nie tylko na poprawę jakości dopasowania modeli HMM, lecz również na częściową weryfikację zasadności stosowania tego narzędzia w analizie danych. W przypadku analizy pytań testu koniunktury w przemyśle daje to nadzieję na stworzenie efektywnej metody prognostycznej punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego.

Na artykuł składają się cztery punkty. Następujący po wprowadzeniu punkt zawiera opis badania, w którym oprócz omówienia algorytmu i krótkiej charakterystyki wykorzystanych do analizy danych, przedstawione zostały poszczególne kroki symulacji komputerowej. Kolejny punkt w całości poświęcony jest prezentacji rezultatów uzyskanych w wyniku działania napisanego przez autora programu komputerowego stanowiącego dokładną implementację opisanego w punkcie drugim postępowania. Artykuł zakończony jest podsumowaniem.

Opis badania

W badaniu wykorzystane zostały trendy szeregów sald dotyczących oceny stanu aktualnego powstałe na bazie odpowiedzi na pytania pochodzące z testu koniunktury w przemyśle prowadzonym przez Instytut Rozwoju Gospodarczego SGH z okresu od marca 1997 do sierpnia 2011 roku. W skład testu wchodzi następujące pytania:

- Pytanie 1 - Wielkość produkcji,
- Pytanie 2 - Portfel zamówień ogółem,
- Pytanie 3 - Portfel zamówień eksportowych,
- Pytanie 4 - Poziom zapasów produkowanych wyrobów,
- Pytanie 5 - Ceny produkowanych wyrobów,
- Pytanie 6 - Poziom zatrudnienia,
- Pytanie 7 - Sytuacja finansowa przedsiębiorstwa,
- Pytanie 8 - Ogólna sytuacja gospodarki polskiej.

⁵ Cappé O., Moulines E., Rydén T., *Inference in Hidden Markov Models*, Springer Series in Statistics 2005.

⁶ Mamon R. S., Elliott R. J. (Eds.), *Hidden Markov Models in Finance*, Springer International Series in Operations Research & Management Science 2007, vol. 104.

⁷ Bernardelli M., Dędyś M., *Ukryte modele Markowa w analizie wyników testu koniunktury gospodarczej*, Prace i Materiały Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH 2012, nr 90, s. 159-181.

Możliwa jest co prawda konstrukcja modeli opartych na alternatywnych przekształceniach pytań testu koniunktury w przemyśle, ale ich przydatność do identyfikacji punktów zwrotnych okazuje się znacznie słabsza – porównaj Bernardelli, Dędyś⁸. Lepszymi własnościami prognostycznymi charakteryzują się natomiast kombinacje pytań, patrz Bernardelli⁹.

Oczyszczone z wahań sezonowych i losowych dane z zestawów odpowiedzi potraktowano jako realizacje składowej obserwowalnej ukrytego modelu Markowa. Na ich podstawie dobrane zostały parametry modeli HMM o dwóch, trzech i czterech stanach. W przypadku dwustanowego modelu HMM przyjęto, iż stan zerowy związany jest z okresami określanymi przez respondentów jako gorsze w ograniczeniu do rozpatrywanego pytania, natomiast stan określony przez liczbę jeden związany jest z sytuacją ocenianą jako lepsza. W przypadku trójstanowego modelu HMM wprowadzono dodatkowy stan $\frac{1}{2}$ symbolizujący sytuację przejściową pomiędzy stanami 0 oraz 1, to jest stan niepewny i trudny w jednoznacznej klasyfikacji. Przestrzeń stanów modelu o czterech stanach jest postaci $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$. Stan 0 oznacza zdecydowane spowolnienie gospodarcze, stan 1 niepodważalne ożywienie sytuacji gospodarczej w Polsce, natomiast stany $\frac{1}{2}$ oraz $\frac{2}{3}$ są stanami przejściowymi, przy czym stan $\frac{1}{2}$ należy interpretować jako stan niepewny ze wskazaniem na gorszą sytuację gospodarczą w kraju, zaś stan $\frac{2}{3}$ sugeruje raczej lepsze warunki gospodarcze. Ze względu na stosunkowo krótką długość badanych szeregów nie rozpatrywano modeli o większej niż cztery liczbie stanów.

Dla każdego z k -stanowych modeli HMM wymagane jest dobranie następujących parametrów:

- prawdopodobieństwa startowe dla poszczególnych stanów (k parametrów),
- prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy dwoma stanami (k^2 parametrów),
- prawdopodobieństwa emisji symbolu w danym stanie ($2k$ parametrów),

przy czym w badaniu $k \in \{2,3,4\}$. Przyjęto przy tym założenie, iż niezerowe prawdopodobieństwa mają przejścia tylko pomiędzy sąsiednimi stanami. Oznacza to przybliżenie uzasadnionej ekonomicznie sytuacji stopniowych zmian w gospodarce. Do wyznaczenia parametrów modeli HMM wykorzystano iteracyjny algorytm Bauma-Welcha z procedury *fit* biblioteki *depmixS4* pakietu obliczeniowego R. Opis algorytmu można znaleźć m.in. w artykule Bauma¹⁰. Wyniki działania algorytmu zależą od przyjętych początkowych wartości prawdopodobieństw i mogą być dalekie od optymalnych. W celu uzyskania rozwiązania bliskiego faktycznemu wystarczy wykonać obliczenia wielokrotnie dla tych samych danych, ale różnych wartości startowych. Stabilność numeryczna rozpatrywanych modeli została zbadana przy użyciu symulacji Monte Carlo, patrz Bernardelli¹¹. Otwartym problemem jest zastosowanie odpowiedniego kryterium wyboru najlepszego z modeli. W zależności od zastosowań wykorzystywane mogą być różne miary. W badaniu uwzględniono następujące mierniki:

- kryterium informacyjne Akaikego (AIC),
- bayesowskie kryterium informacyjne (BIC),
- wartość logarytmu funkcji wiarygodności,
- częstość uzyskiwania konkretnego maksimum w algorytmie Bauma-Welcha.

Dla każdego z pytań przeprowadzono 10 tys. losowań prawdopodobieństw początkowych. Liczby losowane były z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0,1]$. Następnie tak uzyskane ukryte

⁸ Bernardelli M., Dędyś M., *Ukryte modele Markowa w analizie wyników testu koniunktury gospodarczej*, Prace i Materiały Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH 2012, nr 90, s. 159-181.

⁹ Bernardelli M., *Nieklasyczne modele Markowa w analizie cykli koniunktury gospodarczej w Polsce*, Roczniki Naukowe Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH 2013 (w druku).

¹⁰ Baum L. E., Petrie T., Soules G., Weiss N., *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains*, Ann. Math. Statist. 1970, vol. 41, no. 1.

¹¹ Bernardelli M., *Nieklasyczne modele Markowa – problemy numeryczne*, praca badawczo-rozwojowa, SGH 2012.

Kryteria optymalizacyjne w procedurze wykorzystującej ukryte modele Markowa do analiz danych ekonomicznych.

modele Markowa grupowane były ze względu na wartości prawdopodobieństw emisji symbolu w danym stanie (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku). Dla każdej powstałej w ten sposób grupy modeli wyznaczany był jej reprezentant poprzez uśrednienie poszczególnych wartości parametrów. Dla reprezentantów generowana była najbardziej prawdopodobna ścieżka ukrytego łańcucha Markowa w całym rozpatrywanym okresie. W tym celu zastosowany został algorytm Viterbiego¹² zaimplementowany w procedurze *posterior* z pakietu obliczeniowego R. Wyznaczone ścieżki zostały porównane z szeregami referencyjnymi uwzględniającymi datowania punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego dokonany przez

- OECD, szereg referencyjny określany mianem cyklu odchyień,
- M. Drozdowicz-Bieć¹³, szereg zwany w dalszej części artykułu cyklem klasycznym.

W porównaniach dopuszczona była możliwość wyprzedzenia bądź opóźnienia badanych szeregów w stosunku do szeregów referencyjnych. Maksymalny badany czas przesunięcia został przyjęty na poziomie połowy roku, przy miesięcznej częstotliwości rozpatrywanych szeregów. Jako miarę dopasowania pomiędzy zależnymi od czasu ścieżkami ukrytego łańcucha Markowa (HMM) i szeregu referencyjnego (REF) przyjęto normę:

$$\|\overrightarrow{HMM} - \overrightarrow{REF}\| = \sum_t |HMM_t - REF_t|$$

gdzie indeks t przebiega wszystkie punkty czasu z rozpatrywanego okresu. Najlepsze pod względem przyjętego sposobu pomiaru błędu przesunięcie wybrane zostało poprzez sprawdzenie wszystkich możliwości. Posiłkując się uzyskanymi wartościami dokonano porównania jakości dopasowania do szeregów referencyjnych w zależności od przyjętego kryterium optymalności parametrów ukrytego modelu Markowa.

Wyniki

W tabelach 1-3 zebrane zostały wyniki symulacji Monte Carlo dla modeli o odpowiednio dwóch, trzech i czterech stanach. Wartości kryteriów informacyjnych (AIC, BIC) oraz logarytmu funkcji wiarygodności (logLik) zaokrąglone zostały do wartości całkowitych. Szarym tłem oznaczone zostały wartości kryteriów oraz miary dopasowania modeli, które okazały się najlepsze spośród reprezentantów grup, przy czym oznacza to najmniejsze wartości AIC i BIC oraz największe logLik i liczebności grup. Podane zostały także liczby grup, do których zostały przydzielone modele o podobnych wartościach parametrów. Dla większej przejrzystości scalone zostały sąsiadujące wiersze tabel o takich samych wartościach komórek.

Przede wszystkim we wszystkich rozpatrywanych przypadkach występuje całkowita zgodność jeżeli chodzi o kryteria informacyjne oraz logarytm funkcji wiarygodności. Jest to adekwatne do oczekiwań, ponieważ te trzy wskaźniki związane są ściśle z funkcją wiarygodności¹⁴. W większości przypadków również czwarty z badanych wskaźników, to jest liczebność grupy modeli, pokrywa się ze wskazaniem pozostałych trzech wskaźników. Niezgodności zaobserwowano w klasach ukrytych modeli Markowa o trzech stanach dla pytań 2 i 7, jak również dla pytań 4 oraz 8 w przypadku modeli czterostanowych.

Widoczna jest dobra stabilność numeryczna modeli dwustanowych. Fakt ten znajduje odzwierciedlenie w niewielkiej liczbie grup, całkowitej zgodności badanych wskaźników oraz praktycznie jednoznacznym wskazaniu optymalnych parametrów modeli (patrz tabela 1). Jedyne

¹² Algorytm opisany w Viterbi A., Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm, IEEE Transactions on Information Theory 1967, vol. 13.

¹³ Drozdowicz-Bieć M., *Cykle i wskaźniki koniunktury*, Poltext, Warszawa 2012.

¹⁴ Zob. np. Hendry D. F., Nielsen B., *Econometric Modeling: A Likelihood Approach*, Princeton University Press 2007.

Tabela 1. Podsumowanie wyników badania dla dwustanowych ukrytych modeli Markowa.

dwa stany	liczba grup	kryterium	AIC	BIC	logLik	liczebność [%]	porównanie z oecd	porównanie z klasycznym
Pytanie 1	2	AIC, BIC, logLik	1077	1100	-532	99,7	24	16
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 2	2	AIC, BIC, logLik	1192	1214	-589	98,9	25	17
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 3	1	AIC, BIC, logLik	1191	1214	-589	100	41	25
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 4	1	AIC, BIC, logLik	829	851	-408	100	27	39
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 5	2	AIC, BIC, logLik	1036	1058	-511	99,1	36	54
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 6	3	AIC, BIC, logLik	1139	1161	-563	84,5	30	28
		liczebność						
		oecd	1373	1395	-679	15,4	29	24
		klasyczny						
Pytanie 7	2	AIC, BIC, logLik	1120	1142	-553	98,5	21	21
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 8	2	AIC, BIC, logLik	1416	1438	-701	98,6	19	13
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						

Źródło: Opracowanie własne.

Kryteria optymalizacyjne w procedurze wykorzystującej ukryte modele Markowa do analiz danych ekonom.

Tabela 2. Podsumowanie wyników badania dla trójstanowych ukrytych modeli Markowa.

trzy stany	liczba grup	kryterium	AIC	BIC	logLik	liczebność [%]	porównanie z oecd	porównanie z klasycznym
Pytanie 1	5	AIC, BIC, logLik	1003	1048	-488	75,3	30,5	28,5
		liczebność						
		oecd	1016	1060	-494	23,9	27	33
		klasyczny	1003	1048	-488	75,3	30,5	28,5
Pytanie 2	7	AIC, BIC, logLik	1106	1150	-539	10,3	35,5	43,5
		liczebność	1118	1162	-545	85	31,5	31,5
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 3	7	AIC, BIC, logLik	1069	1114	-521	94,7	41,5	40,5
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 4	8	AIC, BIC, logLik	742	787	-357	88,2	51,5	42,5
		liczebność	791	835	-381	0,7	40,5	62,5
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 5	1	AIC, BIC, logLik	939	983	-456	100	45	53
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 6	1	AIC, BIC, logLik	1021	1066	-497	100	35,5	20
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 7	2	AIC, BIC, logLik	1025	1069	-498	49,6	33,5	46,5
		liczebność	1057	1101	-515	50,4	34	21
		oecd	1025	1069	-498	49,6	33,5	46,5
		klasyczny	1057	1101	-515	50,4	34	21
Pytanie 8	6	AIC, BIC, logLik	1326,1	1370,3	-649	98,4	34,5	27,5
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 3. Podsumowanie wyników badania dla czterostanowych ukrytych modeli Markowa.

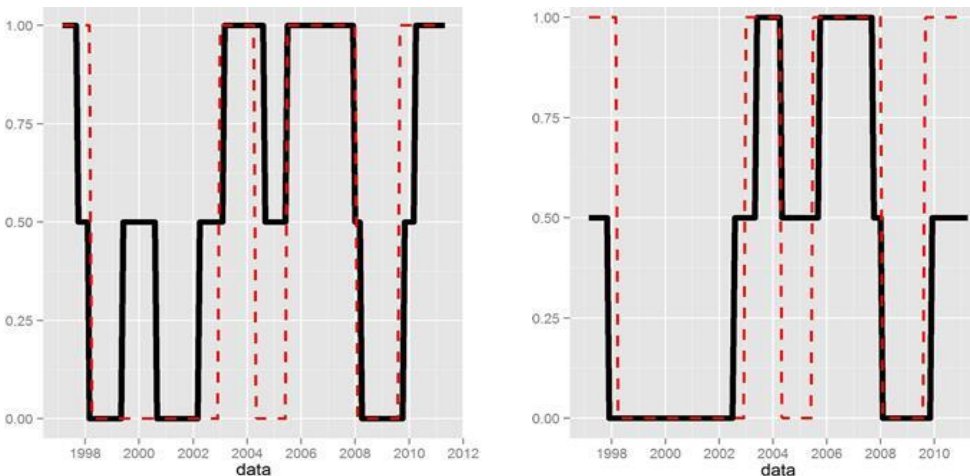
cztery stany	liczba grup	kryterium	AIC	BIC	logLik	liczebność [%]	porównanie z oecd	porównanie z klasycznym
Pytanie 1	16	AIC, BIC, logLik	953	1026	-454	49,7	37,3	44%
		liczebność						
		oecd	965	1037	-459	19,8	33%	31%
		klasyczny						
Pytanie 2	12	AIC, BIC, logLik	1047	1119	-500	59,8	38%	38%
		liczebność						
		oecd	1053	1126	-503	26	36	42%
		klasyczny						
Pytanie 3	17	AIC, BIC, logLik	992	1065	-473	66,2	52%	45%
		liczebność						
		oecd	1008	1081	-481	13,5	45%	52
		klasyczny						
Pytanie 4	16	AIC, BIC, logLik	685	757	-319	15,3	60%	58%
		liczebność						
		oecd	769	842	-361	1,8	50%	44%
		klasyczny						
Pytanie 5	3	AIC, BIC, logLik	894	967	-424	99,5	43	55
		liczebność						
		oecd						
		klasyczny						
Pytanie 6	7	AIC, BIC, logLik	964	1036	-459	81,8	37	35%
		liczebność						
		oecd	995	1067	-474	11,6	37	20%
		klasyczny						
Pytanie 7	14	AIC, BIC, logLik	963	1035	-458	86,6	38%	38%
		liczebność						
		oecd	1102	1175	-528	0,1	34	47%
		klasyczny						
Pytanie 8	13	AIC, BIC, logLik	1260	1333	-607	21,8	42	46%
		liczebność						
		oecd	1337	1410	-645	1,2	32%	26
		klasyczny						

Źródło: Opracowanie własne.

Kryteria optymalizacyjne w procedurze wykorzystującej ukryte modele Markowa do analiz danych ekonom.

pytanie, co do którego można mieć wątpliwość, to pytanie o poziom zatrudnienia (pytanie 6). Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek ukrytych łańcuchów Markowa pokazuje jednak, iż obie grupy różnią się między sobą mało znaczącymi miesięcznymi przesunięciami punktów zwrotnych. Warto zwrócić uwagę, iż liczba grup dla tego pytania była największa (trzy), a przewaga kryterium liczebnościowego dla największej z grup najmniej wyraźna.

W przypadku modeli o trzech stanach (patrz tabela 2) można zaobserwować więcej niejednoznaczności jeżeli chodzi o wybór optymalnych modeli. W modelach uzyskanych na podstawie odpowiedzi na pytania 1 oraz 4 wskaźniki zgodnie wskazały model najlepiej dopasowany do klasycznego szeregu referencyjnego, w przypadku dopasowania do szeregu oecd różnice związane są w większości ze stanami pośrednimi i nie są wyraźne. W przypadku pytań 2 i 7 natomiast, inne grupy modeli zostały wskazane na podstawie mierników opartych o funkcję wiarygodności a inne na podstawie wskaźnika związanego z liczebnością tych grup. Porównanie wykresów (patrz np. rys. 1) sugeruje przewagę wskaźnika liczebnościowego. Warto jednak zwrócić uwagę, iż w każdym problematycznym ze względu na wskazanie optymalnego modelu przypadku, wartość miernika opartego na liczebności nie jest tak wyraźnie wyższa od wartości w pozostałych grupach. Fakt ten jest najbardziej zauważalny w pytaniu 7, gdzie procentowe udziały obu uzyskanych grup to odpowiednio 49,6% i 50,4%.

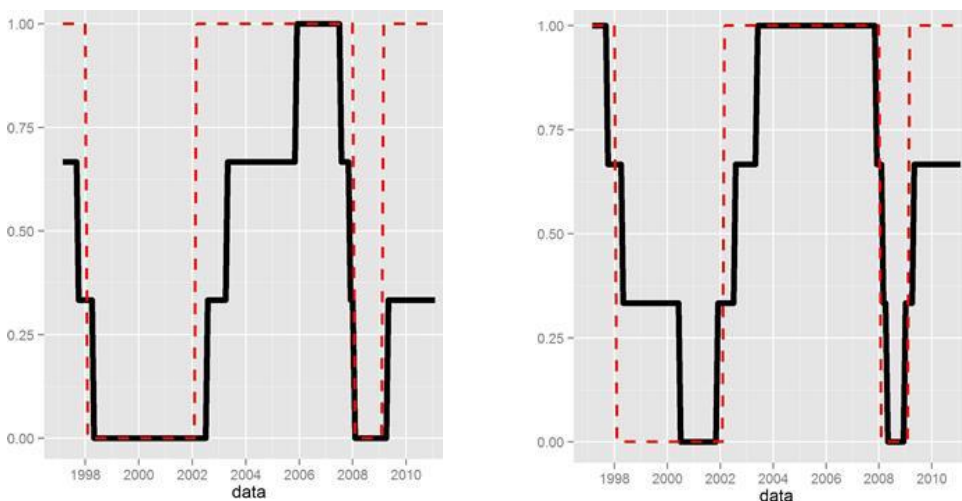


Rysunek 1. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki (czarna, ciągła) HMM o trzech stanach dla szeregu sald odpowiedzi na pytanie o portfel zamówień ogółem (pytanie 2) z szeregiem referencyjnym OECD (czerwona, przerywana linia). Po lewej wykres ścieżki wybranej na podstawie wskaźnika liczebności (miara dopasowania: 31,5), po prawej wykres ścieżki uzyskanej na podstawie wskaźników związanych z funkcją wiarygodności (miara dopasowania: 35,5).

Źródło: Opracowanie własne.

Czterostanowe ukryte modele Markowa charakteryzują się najmniejszą stabilnością numeryczną. Liczba uzyskanych grup to zwykle kilkanaście, przy zaledwie 1-3 grupach dla modeli dwustanowych i kilku dla modeli o trzech stanach. W zdecydowanej większości przypadków modele wskazane przez badane wskaźniki oraz te, które faktycznie minimalizują przyjętą miarę odległości, należą do dwóch różnych grup. Dodatkowo dla szeregów sald odpowiedzi na pytania 4 i 8 pojawia się niejednoznaczność we wskazaniach wskaźników. Dla pytań 2, 3, 6 i 7 różnice w wartościach obliczonych stanów są stosunkowo niewielkie i dotyczą zazwyczaj stanów pośrednich. Najlepiej dopasowane ścieżki HMM dla danych związanych z pytaniami 1, 4 oraz 8 charakteryzują się najlepszymi wielkościami badanych wskaźników. Lepsze miary dopasowania

uzyskiwane są w takich przypadkach dla modeli z wyższym wskaźnikiem liczebnościowym. Przykład porównania dopasowania obliczonych ścieżek został umieszczony na wykresach na rys. 2.



Rysunek 2. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki (czarna, ciągła linia) HMM o czterech stanach dla szeregu sald odpowiedzi na pytanie o ogólną sytuację gospodarki polskiej (pytanie 8) z klasycznym szeregiem referencyjnym (czerwona, przerywana linia). Po lewej wykres ścieżki wybranej na podstawie wskaźników związanych z funkcją wiarygodności (miara dopasowania: 46,7), po prawej wykres ścieżki uzyskanej na podstawie wskaźnika liczebności (miara dopasowania: 31).

Źródło: Opracowanie własne.

Poza pytaniem 5 nigdzie wartość wskaźnika związanego z liczebnością grup nie jest wyraźnie dominująca i oscyluje w granicach 60% dla najliczniejszych grup. W pytaniu 6 i 7 wartość tego wskaźnika przekracza co prawda 80%, ale różnice pomiędzy wyznaczonymi ścieżkami HMM nie są duże i wizualnie nieznaczne.

Podsumowanie

Z przeprowadzonych analiz wyników symulacji komputerowych można wyciągnąć następujące wnioski:

- Dwustanowe ukryte modele Markowa dla trendu szeregu sald odpowiedzi na każde z ośmiu pytań są stabilne i w jednoznaczny sposób można wskazać parametry modelu najlepszego w rozpatrywanej klasie modeli HMM bez względu na przyjęte kryteria wyboru optymalności.
- Kryteria oparte na wartościach funkcji wiarygodności (AIC, BIC, logLik) dają zgodne wskazania związane z optymalnością modeli HMM.
- Wraz ze wzrostem liczby stanów rośnie liczba grup modeli HMM o różnych parametrach i trudniej jednoznacznie wskazać optymalne rozwiązanie.
- Liczebność grupy modeli HMM o podobnych wielkościach parametrów jest istotnym kryterium optymalizacyjnym. Liczebności na poziomie powyżej 90% okazały się być wystarczające do wskazania modelu o najlepszych parametrach w poszukiwanej klasie modeli HMM.
- W przypadku niezgodności kryterium liczebnościowego i wskaźników opartych na wartościach funkcji wiarygodności, modele z grup liczniejszych mają lepsze miary dopasowania do szeregów referencyjnych.

Kryteria optymalizacyjne w procedurze wykorzystującej ukryte modele Markowa do analiz danych ekonomicznych.

- Zauważone prawidłowości pozwalają na ograniczenie liczby badanych modeli do tych o najlepszych właściwościach, przy czym zwiększenie liczby stanów ukrytego modelu Markowa poprawia jakość dopasowania do szeregów referencyjnych.

Należy również podkreślić, iż nie każdy szereg sald odpowiedzi wnosi taką samą ilość informacji, co oznacza, iż niektóre pytania mogą być bardziej przydatne pod kątem prognostycznym. W dodatku uwzględnione w badaniu szeregi referencyjne nie są zgodne jeżeli chodzi o identyfikację punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego w Polsce, stąd gorsze dopasowanie z punktu widzenia pomiaru odległości od któregośkolwiek szeregu referencyjnego nie musi oznaczać, iż wskazania HMM są niepoprawne. Ukryte modele Markowa bez względu na liczbę rozpatrywanych stanów nie stanowią uniwersalnej odpowiedzi na pytanie o aktualny i przyszły stan gospodarki polskiej, tym niemniej okazują się być przydatnym narzędziem do analizy cyklu koniunkturalnego, które można w dużym stopniu zautomatyzować. Stanowi to uzasadnienie do dalszej pracy nad udoskonaleniem algorytmów identyfikacji punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego na podstawie wyników badań ankietowych. Algorytmy te mogą znaleźć zastosowanie w analizie innych szeregów makroekonomicznych.

Bibliografia

1. Baum L. E., Petrie T., Soules G., Weiss N., *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains*, Ann. Math. Statist. 1970, vol. 41, no. 1.
2. Bernardelli M., *Nieklasyczne modele Markowa – problemy numeryczne, praca badawczo-rozwojowa*, SGH 2012.
3. Bernardelli M., Dędyś M., *Ukryte modele Markowa w analizie wyników testu koniunktury gospodarczej*, Prace i Materiały Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH 2012, nr 90, s. 159-181.
4. Bernardelli M., *Nieklasyczne modele Markowa w analizie cykli koniunktury gospodarczej w Polsce*, Roczniki Naukowe Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH 2013 (w druku).
5. Białowolski P., Kuszewski T., Witkowski B., *Bayesowskie uśrednianie klasycznych oszacowań w prognozowaniu wskaźników makroekonomicznych z użyciem danych z testów koniunktury*, Prace i Materiały Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH 2013, nr 91, s. 121-144.
6. Cappé O., Moulines E., Rydén T., *Inference in Hidden Markov Models*, Springer Series in Statistics, 2005.
7. Drozdowicz-Bieć M., *Cykle i wskaźniki koniunktury*, Poltext, Warszawa 2012.
8. Goczek Ł., *Przegląd i ocena ekonometrycznych metod używanych w modelach empirycznych wzrostu gospodarczego*, Gospodarka Narodowa 2012, vol. 10, s. 49-73.
9. Gradzewicz M., Growiec J., Hagemeyer J., Popowski P., *Cykl koniunkturalny w Polsce - wnioski z analizy spektralnej*, Bank i Kredyt 2010, nr 41(5), s. 41-76.
10. Growiec J., *Zagregowana funkcja produkcji w ekonomii wzrostu gospodarczego i konwergencji*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2012.
11. Hendry D. F., Nielsen B., *Econometric Modeling: A Likelihood Approach*, Princeton University Press 2007.
12. Mamon R. S., Elliott R. J. (Eds.), *Hidden Markov Models in Finance*, Springer International Series in Operations Research & Management Science 2007, vol. 104.
13. Próchniak M., Witkowski B., *Real economic convergence and the impact of monetary policy on economic growth of the EU countries: The analysis of time stability and the identification of major turning points based on the Bayesian methods*, National Bank of Poland Working Papers 2012, No. 137.
14. Świsłowska D., *Prawdopodobieństwo wystąpienia kryzysu walutowego w Polsce w warunkach integracji gospodarczej i walutowej*, [w:] Polska w Unii Europejskiej.

Dynamika konwergencji ekonomicznej, J. Michałek, W. Siwiński, M. Socha (red.), PWN, Warszawa 2007.

15. Viterbi A., *Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm*, IEEE Transactions on Information Theory 1967, vol. 13.

Optimization criteria in the procedure using hidden Markov models to the economic data analysis

In the article there is the description of the results of the analysis related to the selection of an optimization criterion in the procedure of computing the parameters of hidden Markov models used to identify turning points in the business cycle in Poland. There were taken into the consideration information criteria (AIC, BIC), maximum-likelihood and frequency of obtaining a given set of parameters in the Monte Carlo simulations. The study was based on the data from the business tendency surveys in industry conducted by the Research Institute for Economic Development in Warsaw School of Economics.

Keywords: Hidden Markov models, Baum-Welch algorithm, Viterbi algorithm, optimization, information criteria, business tendency surveys

Autor jest adiunktem na Instytucie Ekonometrii Kolegium Analiz Ekonomicznych Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie. Interdyscyplinarność jego prac naukowych opiera się w głównej mierze na wykorzystaniu aparatu informatycznego i matematycznego do rozwiązywania problemów ekonomii matematycznej.