

MICHAŁ BERNARDELLI

***NIEKLASYCZNE MODELE MARKOWA –
PROBLEMY NUMERYCZNE***

Opracowanie w ramach badania młodych naukowców

Nr badania: 03/BMN/07/12

Kierownik badania:
Michał Bernardelli

Szkoła Główna Handlowa
Kolegium Analiz Ekonomicznych
Warszawa 2012



Spis treści

1. Wprowadzenie	4
2. Ukryte modele Markowa	6
3. Charakterystyka danych empirycznych	8
4. Opis badania.....	10
5. Wyniki badania	14
6. Podsumowanie	26
Literatura	27

Streszczenie

Praca zawiera opis procedury wyboru najlepszego ukrytego modelu Markowa w klasie modeli o określonej liczbie dwóch lub trzech stanów. Parametry modeli wyznaczone zostały na podstawie odpowiedzi respondentów na pytania testu koniunktury w przemyśle. Celem badania było zbadanie stabilności tak konstruowanych modeli i wybór spośród nich tych, które charakteryzują się najlepszymi własnościami. Kluczową częścią badania była implementacja zaproponowanych algorytmów oraz analiza numeryczna wykonanych obliczeń komputerowych.

Wyniki przeprowadzonych symulacji okazały się w większości przypadków potwierdzać bardzo dobrą stabilność zaproponowanych ukrytych modeli Markowa. Udało się w ten sposób zweryfikować przydatność tych modeli do analizy cykli koniunkturalnych w Polsce oraz sensowność dalszych prac w tym zakresie.

Praca ta stanowi uzupełnienie pracy zatytułowanej *Ukryte modele Markowa w analizie wyników testu koniunktury gospodarczej* powstałej jako rezultat współpracy z dr Moniką Dędys.

1. Wprowadzenie

Badanie cykli koniunkturalnych stanowi jedno z podstawowych źródeł oceny aktualnej i przyszłej sytuacji gospodarczej w kraju. Z pewnością przyszły poziom rozwoju gospodarki zależy od wielu czynników takich jak chociażby produkt krajowy brutto, eksport, poziom zatrudnienia czy wielkość produkcji. Budowa deterministycznych modeli prognostycznych jest jednak problematyczna ze względu na stosunkowo niewielką długość dostępnych koniunkturalnych szeregów czasowych, jak również ze względu na potencjalną obecność zmiennych ukrytych w tworzonych modelach. Stąd nawet jednoznaczna identyfikacja punktów zwrotnych w polskiej gospodarce nie jest zadaniem łatwym. Alternatywne rozwiązanie stanowią, stosowane z powodzeniem, modele Markowa, których podstawą jest niedeterministyczny ich charakter.

Celem badania było zastosowanie do analizy cykli koniunkturalnych w Polsce ukrytych modeli Markowa. Ze względu na ogrom możliwych kombinacji podstawowym zadaniem było ograniczenie liczby rozpatrywanych modeli do tych charakteryzujących się najlepszymi własnościami. Integralną część badania stanowiło zarówno zaprojektowanie, jak i implementacja rozpatrywanych modeli. Dopasowanie parametrów modeli zostało dokonane na podstawie dostępnych danych historycznych. Kluczową kwestią przedstawioną w pracy była odpowiedź na pytanie o stabilność tak zbudowanych modeli. Wpływ na nią ma wiele czynników natury numerycznej, od których zależy zbieżność algorytmów użytych do dopasowania parametrów wyznaczonych modeli, a w końcowym rozrachunku jakość dopasowania uzyskanych w ten sposób modeli do szeregów referencyjnych (patrz [Bernardelli 2012]). Wybór odpowiedniego, najlepszego w rozpatrywanej klasie, modelu stanowi podstawę do dalszych rozważań w zakresie zastosowań ukrytych modeli Markowa do analizy zmian klimatu koniunktury. Stabilność rozpatrywanych modeli daje między innymi nadzieję na stworzenie efektywnej metody prognostycznej punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego.

Praca podzielona jest na sześć rozdziałów. Po części wprowadzającej w tematykę pracy, w drugim rozdziale krótko scharakteryzowane zostały ukryte modele Markowa z uwzględnieniem podstawowych pojęć oraz używanych w pracy oznaczeń. Rozdział trzeci poświęcony jest opisowi danych z testu koniunktury w przemyśle. Przedstawiona została w nim procedura wstępnej obróbki danych empirycznych użytych do konstrukcji ukrytych

modeli Markowa. W rozdziale czwartym omówiono kolejne kroki prowadzące do wyboru najlepszego modelu dla każdego z pytań testu koniunktury. Przedstawione zostały również algorytmiczne aspekty użytych metod z uwagami implementacyjnymi włącznie. Rozdział piąty w całości poświęcony jest prezentacji rezultatów uzyskanych w wyniku działania napisanego przez autora programu komputerowego stanowiącego dokładną implementację opisanego w rozdziale czwartym postępowania. Praca zakończona jest przedstawionymi w rozdziale szóstym wnioskami.

2. Ukryte modele Markowa

Modele Markowa można zdefiniować na gruncie procesów stochastycznych (patrz np. [Cappé 2005]). Można również podać równoważną definicję wykorzystującą terminologię z dziedziny automatów skończonych. Niech S_X będzie skończonym k -elementowym zbiorem, tak zwanym zbiorem stanów z wyróżnionym stanem S_0 traktowanym jako stan początkowy. Zakładamy tym samym, że k jest większe od zera, to jest, że zbiór stanów jest niepusty. Niech dodatkowo

$$P = [p_{i,j}]_{i,j=1}^k$$

oznacza macierz prawdopodobieństw przejść, przy czym $p_{i,j}$ jest prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do stanu j . Zakładamy, że macierz przejść jest stochastyczna, czyli dla każdego i

$$\sum_{j=1}^k p_{i,j} = 1.$$

Łłańcuchem Markowa nazywamy uporządkowaną trójkę (S_X, S_0, P) . Charakterystyczną cechą łańcucha Markowa jest tak zwany brak pamięci. Oznacza to, iż następny stan zależy tylko od stanu obecnego, a nie od historii dojścia do aktualnego stanu.

Ukryte modele Markowa, w skrócie HMM (*ang. Hidden Markov Models*), w literaturze informatycznej znane są również pod nazwą probabilistycznych automatów z wyjściem (patrz np. [Tiuryn 2006]). Stanowią one rozszerzenie definicji łańcucha Markowa o dodatkowy alfabet Σ , którego litery emitowane są w konkretnym stanie z zadaniem prawdopodobieństwem. Jeżeli dany HMM jest w stanie $i \in S_X$, to emituje on symbol $x \in \Sigma$ z prawdopodobieństwem $e_i(x)$, a następnie przechodzi do stanu j z prawdopodobieństwem $p_{i,j}$. Przyjmujemy, iż w każdym stanie emitowany jest jakiś symbol, to jest, że dla każdego $i \in S_X$

$$\sum_{x \in \Sigma} e_i(x) = 1.$$

Obserwowalne zatem są tylko symbole emitowane przez model, zaś to, w jakim aktualnie stanie znajduje się ukryty łańcuch Markowa pozostaje nieobserwowalne.

Jeśli przestrzeń stanów ukrytego łańcucha Markowa jest k -elementowa, to będziemy mówić o k -stanowym modelu HMM. W pracy rozważamy dwu- i trójstanowe ukryte modele Markowa z prawdopodobieństwami emisji symboli danych przez rozkłady normalne.

W ekonometrii modele HMM wykorzystuje się najczęściej do analizy szeregów finansowych i makroekonomicznych (patrz np. [Cappé 2005]). Podstawowym zakresem zastosowań HMM jest jednak rozpoznawanie wzorców, jak na przykład mowy, sygnałów czy odręcznego pisma. Ukryte modele Markowa są również szeroko stosowane w bioinformatyce.

3. Charakterystyka danych empirycznych

W pracy wykorzystane zostały odpowiedzi na pytania pochodzące z testu koniunktury w przemyśle prowadzonym przez Instytut Rozwoju Gospodarczego SGH z okresu od marca 1997 do sierpnia 2011 roku. W skład testu wchodzi następujące pytania:

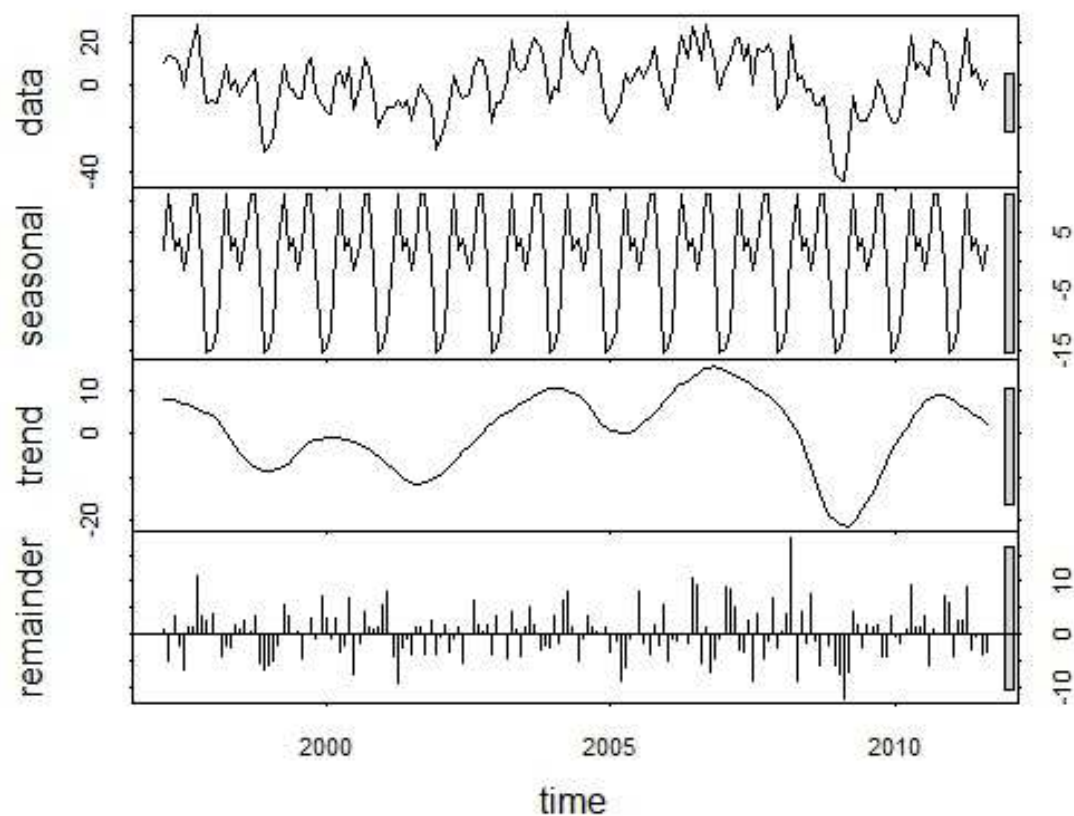
- Pytanie 1 - Wielkość produkcji,
- Pytanie 2 - Portfel zamówień ogółem,
- Pytanie 3 - Portfel zamówień eksportowych,
- Pytanie 4 - Poziom zapasów produkowanych wyrobów,
- Pytanie 5 - Ceny produkowanych wyrobów,
- Pytanie 6 - Poziom zatrudnienia,
- Pytanie 7 - Sytuacja finansowa przedsiębiorstwa,
- Pytanie 8 - Ogólna sytuacja gospodarki polskiej.

Dane zawierają odpowiedzi na pytania o aktualną sytuację w gospodarce oraz o prognozę na najbliższy okres dokonywaną przez respondentów. Ze względu na ogrom możliwych kombinacji danych wejściowych, kluczowym zadaniem było ograniczenie rozpatrywanych modeli HMM do kilku klas o najlepszych właściwościach. Na podstawie przeprowadzonych przez autora badań porównawczych do dokładniejszej analizy zakwalifikowano modele oparte na trendach szeregów sald dotyczących oceny stanu aktualnego. Innymi słowy dane zostały poddane wstępnemu przetworzeniu, które polegało na ich oczyszczeniu z wahań sezonowych i losowych. Do dekompozycji szeregów wykorzystana została procedura *stl* z pakietu komputerowego R. Procedura ta stanowi implementację algorytmu opartego na lokalnie ważonej metodzie regresji znanego pod nazwą „loess” (patrz [Cleveland 1990]). Na rysunku 1 przedstawiona została dekompozycja szeregu sald odpowiedzi na pytanie o wielkość produkcji (Pytanie 1). Wyeksponowane zostały:

- składowa sezonowa (ang. *seasonal*),
- trend (ang. *trend*),
- składowa losowa (ang. *remainder*),

przy czym (porównaj rys. 1)

$$data = seasonal + trend + remainder.$$



Rysunek 1 Dekompozycja szeregu sald odpowiedzi na pytanie o wielkości produkcji (Pytanie 1) z wykorzystaniem procedury STL.

Tak przygotowane zestawy odpowiedzi na każde z ośmiu pytań potraktowano jako realizacje składowej obserwowalnej ukrytego modelu Markowa. Na ich podstawie dobrane zostały parametry modeli HMM.

4. Opis badania

Ze względu na łatwość w interpretacji ekonomicznej, w badaniu uwzględniono dwustanowe oraz trójstanowe ukryte modele Markowa. Dwuelementowy alfabet emitowanych symboli został wyznaczony na podstawie przetworzonych danych z zestawów odpowiedzi.

W przypadku dwustanowego modelu HMM przyjęto, iż dwuelementowa przestrzeń stanów jest postaci $S_X = \{0, 1\}$. Stan zerowy związany jest z okresami określanymi przez respondentów jako gorsze w ograniczeniu do rozpatrywanego pytania, natomiast stan określony przez liczbę jeden związany jest z sytuacją ocenianą jako lepsza.

W przypadku trójstanowego modelu HMM przestrzeń stanów jest postaci $S_X = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Stany 0 oraz 1, tak jak w przypadku modelu dwustanowego, oznaczają odpowiednio spowolnienie i ożywienie sytuacji gospodarczej w Polsce. Stan $\frac{1}{2}$ symbolizuje stan przejściowy pomiędzy stanami 0 oraz 1, to jest stan niepewny i trudny w jednoznacznej klasyfikacji.

Dla każdego z n -stanowych modeli HMM wymagane jest dobranie następujących parametrów:

- prawdopodobieństwa startowe dla poszczególnych stanów (n parametrów),
- prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy dwoma stanami (n^2 parametrów),
- prawdopodobieństwa emisji symbolu w danym stanie ($2n$ parametrów),

przy czym w badaniu $n \in \{2, 3\}$. Do doboru parametrów modeli HMM wykorzystano iteracyjny algorytm należący do klasy metod maksymalizujących wartość oczekiwaną (patrz [Tiuryn 2006]), tak zwanej metody Expectation-Maximization. Dokładniej, użyto implementacji zawartej w procedurze *fit* z biblioteki *depmixS4* pakietu obliczeniowego R. Metoda ta jest powszechnie znana pod nazwą algorytmu Bauma-Welcha¹, którego dokładny opis można znaleźć m.in. w artykule [Baum 1970]. Algorytm ten należy ze względu na sposób działania zaliczyć do klasy algorytmów zachłannych. Stąd rozwiązania uzyskane w wyniku jego działania mogą okazać się dalekie od optymalnych. Nie mamy bowiem gwarancji, iż uzyskany rezultat jest maksimum globalnym. W zależności od danych startowych może okazać się, iż znalezione rozwiązanie jest tylko lokalnym maksimum.

¹ Inna powszechnie stosowana nazwa dla algorytmu doboru parametrów modeli HMM to algorytm forward-backward, a w literaturze polskojęzycznej również algorytm prefiksowo-sufiksowy.

Stanowi to podstawową wadą algorytmu Bauma-Welcha. Stosowanym wyjściem z tej sytuacji jest wielokrotne wykonanie algorytmu dla tych samych danych, ale różnych wartości startowych. Weryfikacja wyników oraz wybór najlepszego z nich może nastąpić wówczas w oparciu o kilka kryteriów, przede wszystkim o

- kryteria informacyjne AIC i BIC,
- częstość uzyskania konkretnego maksimum metodą Expectation-Maximization.

Losowy wybór wartości inicjalizujących działanie algorytmu Bauma-Welcha jest de facto równoważny symulacji typu Monte Carlo. Jeżeli identyfikacja minimum globalnego nie pozostawia wątpliwości, to świadczy to o stabilności rozpatrywanego modelu ze względu na znalezione parametry. Sprawdzenie stabilności modeli HMM o dwóch i trzech stanach opartych na trendach szeregów sald dotyczących oceny stanu aktualnego na podstawie każdego z ośmiu pytań testu koniunktury w przemyśle stanowi podstawowy cel niniejszej pracy.

W celu sprawdzenia stabilności modeli HMM użyto algorytmu Bauma-Welcha do doboru parametrów, przy czym dla każdego pytania użyto 10 tys. losowych prawdopodobieństw startowych dla poszczególnych stanów. Liczby losowane były z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0,1]$. Oznacza to, iż zbudowano i zbadano w sumie 160 tys. modeli HMM – 80 tys. dwustanowych i tyle samo trójstanowych modeli z warunkowymi rozkładami normalnymi. Każdy z modeli został sklasyfikowany ze względu na wartości kryteriów informacyjnych AIC oraz BIC, jak również ze względu na wyznaczone wartości oczekiwane i odchylenia standardowe prawdopodobieństw rozkładów normalnych dopasowanych do każdego ze stanów.

Biorąc pod uwagę zaokrąglenia związane ze stosowaną na komputerach arytmetyką zmiennoprzecinkową oraz wybranymi kryteriami stopu stosowanej metody iteracyjnej parametry praktycznie każdego z uzyskanych modeli są unikatowe. Stąd konieczne było porównywanie tylko zaokrąglonych wartości liczbowych tych parametrów. Po sprawdzeniu różnej jakości zaokrągleń okazało się, iż rozpatrywanie parametrów badanych modeli z dokładnością do jednego miejsca po przecinku jest zarówno wystarczające, jak i optymalne z punktu widzenia liczby uzyskanych w ten sposób klas modeli oraz generowanych przez nie najbardziej prawdopodobnych ścieżek ukrytego łańcucha Markowa².

² Ścieżki te wygenerowane zostały przy użyciu algorytmu Viterbiego i opisane w pracy [Bernardelli 2012].

Należy podkreślić, iż uzyskana bezpośrednio w wyniku działania algorytmu Bauma-Welcha numeracja stanów nie musi odpowiadać nadawanej im interpretacji ekonomicznej. Innymi słowy może się okazać, iż w niektórych modelach będzie konieczne przenumeroowanie stanów. Formalnie stan 0 utożsamiany jest z rozkładem warunkowym o najniższej wartości średniej, czyli najmniejszej wartości oczekiwanej prawdopodobieństwa rozkładu normalnego odpowiadającego danemu stanowi. Analogicznie numerem 1 określony jest stan o rozkładzie warunkowym z największą wartością średnią. W przypadku modeli trójstanowych stan o pośredniej wartości średniej rozkładu warunkowego utożsamiany jest ze stanem $\frac{1}{2}$. Przy klasyfikacji modeli należało zatem uwzględnić takie przenumeroowanie stanów, aby odpowiadało ono formalnym wymagom.

Po przedzieleniu modeli HMM do odpowiednich grup klasyfikacyjnych ze względu na wartości średnie rozkładów warunkowych, dla każdej z rozpoznanych grup zbudowany został reprezentatywny dla danej grupy model. Parametry tego modelu zostały wyznaczone jako średnie wartości parametrów modeli wchodzących w skład tej grupy. Porównania pomiędzy grupami dokonywane były na reprezentantach poszczególnych grup. Spośród nich również wybierany był model najlepszy dla danego pytania.

W celu weryfikacji wyboru najlepszego z modeli, dla każdego z reprezentantów grup wyznaczana została najbardziej prawdopodobna ścieżka ukrytego łańcucha Markowa w całym rozpatrywanym okresie. Do jej obliczenia zastosowany został algorytm Viterbiego (patrz np. [Viterbi 1967]) zaimplementowany w procedurze *posterior* z pakietu obliczeniowego R. Tak wyznaczone ścieżki zostały porównane z szeregami referencyjnymi. Szczegóły dotyczące procedury oraz jakości dopasowania wyznaczonych modeli HMM do szeregów referencyjnych wraz z wykresami przedstawione zostały w pracy [Bernardelli 2012].

Procedurę testowania stabilności modeli HMM można podsumować w następujących krokach.

Dla każdego z ośmiu pytań i dla $n \in \{2, 3\}$:

- (1) dobierz parametry n -stanowego modelu HMM stosując algorytm Bauma-Welcha,
- (2) na podstawie wartości średnich rozkładów warunkowych przydziel stanom odpowiednie numery,

- (3) przydziel model do odpowiedniej grupy na podstawie zaokrąglonych do jednego miejsca po przecinku parametrów, to jest na podstawie wartości średnich rozkładów warunkowych,
- (4) wykonaj 10 tys. razy kroki (1) - (3),
- (5) dla każdej zidentyfikowanej grupy modeli wyznacz reprezentatywny model HMM z parametrami równymi średnim wszystkim parametrów modeli w tej grupie,
- (6) dla wyznaczonych reprezentatywnych dla każdej z grup modeli wyznacz najbardziej prawdopodobną ścieżkę ukrytego łańcucha Markowa wykorzystując algorytm Viterbiego,
- (7) na podstawie kryteriów informacyjnych, liczebności grup oraz porównań z szeregami referencyjnymi wyznacz najlepszy model HMM.

5. Wyniki badania

Zbiórce informacje o grupach klasyfikacyjnych dla każdego z ośmiu pytań testu koniunktury w przemyśle zamieszczono w dwóch tabelach: w tabeli 1 znajdują się dane dla modeli dwustanowych, natomiast w tabeli 2 wyniki dla modeli trójstanowych. Szarym tłem zaznaczone zostały grupy modeli uznanych za najlepsze dla danego pytania. Decyzję podjęto na podstawie kryteriów informacyjnych AIC oraz BIC, jak również na podstawie liczebności grup.

Dodatkowo na wykresach z rys. 2-9 umieszczono najbardziej prawdopodobne ścieżki dla reprezentatywnych dwustanowych modeli każdej z grup klasyfikacyjnych, zaś na wykresach z rys. 10-17 analogiczne ścieżki dla modeli trójstanowych. Ciągłą czarną linią zaznaczone zostały wykresy modeli z grup, które zostały uznane za najlepsze dla danego pytania.

W przypadku modeli dwustanowych liczba grup klasyfikacyjnych dla poszczególnych pytań ograniczyła się w każdym z przypadków tylko do dwóch. Zarówno oba kryteria informacyjne, jak i liczebności grup pozwoliły na jednoznaczną identyfikację najlepszego modelu. Warto również podkreślić, iż w wielu rozpatrywanych przypadkach mimo podziału na dwie grupy o różnych wartościach parametrów oraz innych poziomach kryteriów informacyjnych, wygenerowane przez algorytm Viterbiego najbardziej prawdopodobne ścieżki były praktycznie jednakowe lub różniące się tylko w nieznaczny sposób. Jako przykłady można podać przedstawione na jednym wykresie najbardziej prawdopodobne ścieżki stanów dla pytania o portfel zamówień ogółem (rys. 3), portfel zamówień eksportowych (rys. 4), poziom zapasów produkowanych wyrobów (rys. 5), ceny produkowanych wyrobów (rys. 6), sytuację finansową przedsiębiorstwa (rys. 8) czy ogólną sytuację gospodarki polskiej (rys. 9). Wszystkie te argumenty świadczą o bardzo wysokiej stabilności dwustanowych ukrytych modeli Markowa dla wszystkich pytań testu koniunktury.

W przypadku modeli trójstanowych nie wszystkie wybory najlepszych modeli są tak jednoznaczne. Raczej nie budzą wątpliwości modele HMM dla pytań o numerach 1, 2, 3, 5, 6 oraz 8. Zarówno kryteria informacyjne, jak i liczebności grup dają te same odpowiedzi. Co więcej w przypadku pytania o wielkość produkcji (rys. 10), portfel zamówień ogółem (rys. 11) i portfel zamówień eksportowych (rys. 12) obliczone najbardziej prawdopodobne ścieżki stanów HMM są stosunkowo podobne jeżeli chodzi o najbardziej liczne grupy

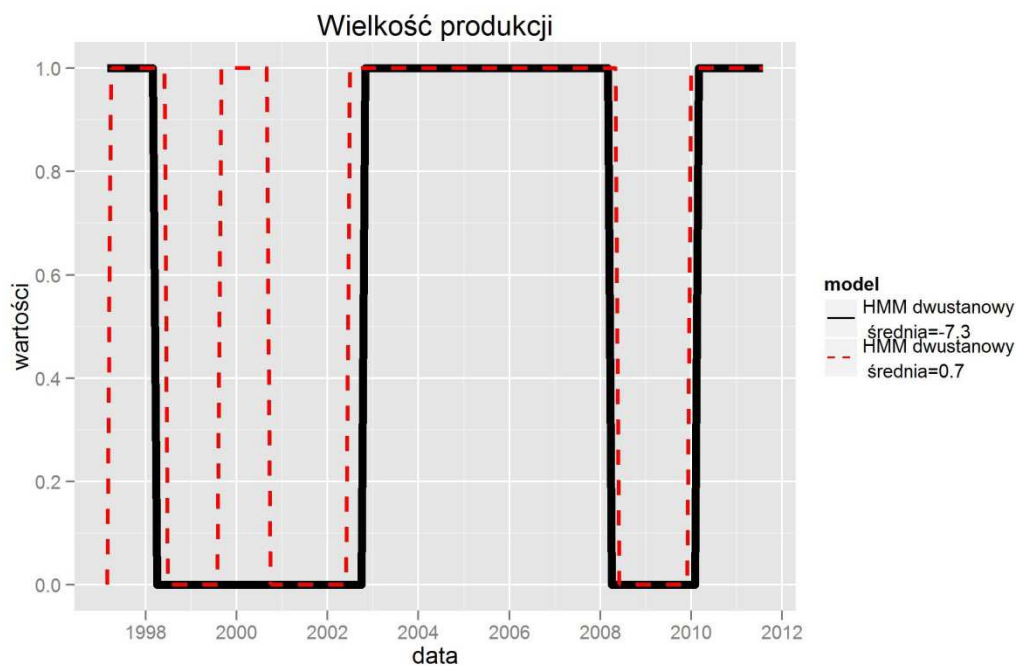
klasyfikacyjne. Znacznie większe różnice można zaobserwować w wykresach dla pytań o ceny produkowanych wyrobów (rys. 14), poziom zatrudnienia (rys. 15) i ogólną sytuację gospodarki polskiej (rys. 17). Warto również podkreślić, iż np. w przypadku pytania 3, 8, a nade wszystko pierwszego, różnice w liczebnościach najbardziej licznych grup nie są już tak ewidentne, jak było to w przypadku modeli dwustanowych.

Rozważając problematyczną klasyfikację modelu dla pytania o sytuację finansową przedsiębiorstwa zauważamy, iż kryteria informacyjne i liczebności grup dają odmienne wyniki jeżeli chodzi o wybór modelu najbardziej trafionego. Analizując wykresy z rysunku 16, można jednak zyskać przeświadczenie, iż poprawnym wyborem jest kierowanie się wskazaniem kryteriów informacyjnych. Dynamika zmian na wykresie zaznaczonym przerywaną czerwoną kreską jest zdecydowanie zbyt duża. Co więcej, liczebności obu grup nie różnią się tak diametralnie, stąd model o wartości średniej dla stanu 0 równej -20 należy uznać za najlepszy w klasie modeli HMM dla pytania 7.

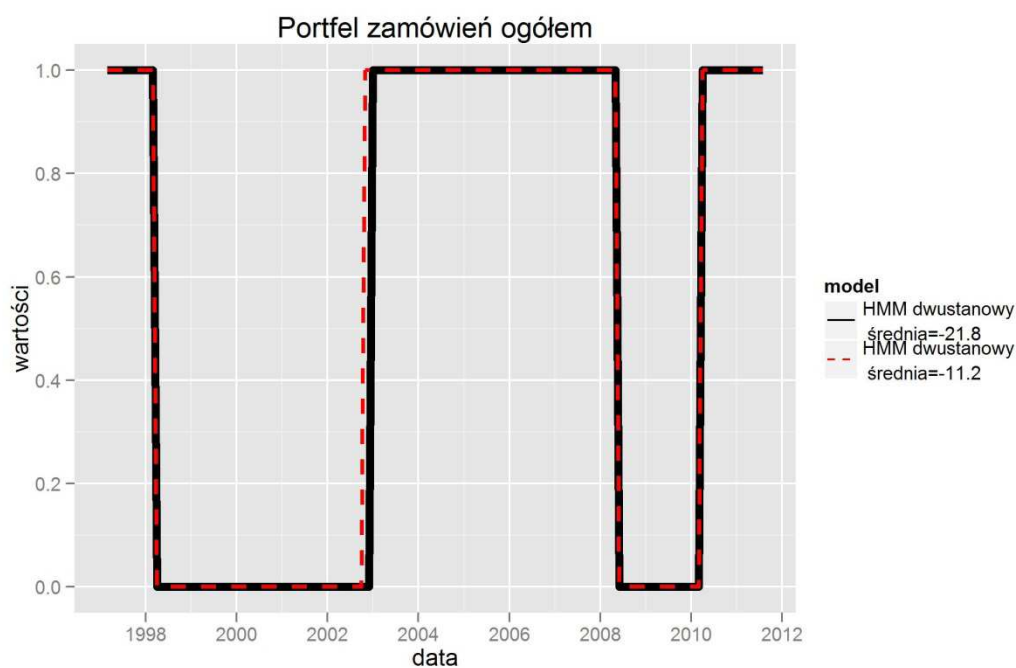
Chyba najbardziej niejednoznaczny okazał się wybór odpowiedniego modelu dla pytania o poziom zapasów produkowanych wyrobów. W tym przypadku różnica w liczebnościach obu najliczniejszych grup jest ewidentna. Zarówno jednak kryteria informacyjne, jak i wykresy (patrz rys. 13) najbardziej prawdopodobnych ścieżek stanów są dość podobne. Oznacza to, iż wszelkie ewentualne różnice wynikłe z korzystania z obu tych modeli nie powinny być drastyczne. Oba modele tak samo rozpoznały okresy spowolnienia gospodarczego oraz jeden okres poprawy koniunktury. Model z mniejszymi wartościami kryteriów informacyjnych w pozostałych okresach okazał się bardziej powściągliwy w rozpoznawaniu okresu wzrostu pozostając w stanie pośrednim. Można z tego względu uznać, iż model ten jest modelem bezpieczniejszym i dlatego on też został zaproponowany jako model lepszy.

Tabela 1 Podział klasyfikacyjny dwustanowych ukrytych modeli Markowa ze względu na wartości średnie rozkładów warunkowych zaokrąglone do jednego miejsca po przecinku. Na szarym tle podane zostały parametry modeli uznanych przez najlepsze dla danego pytania.

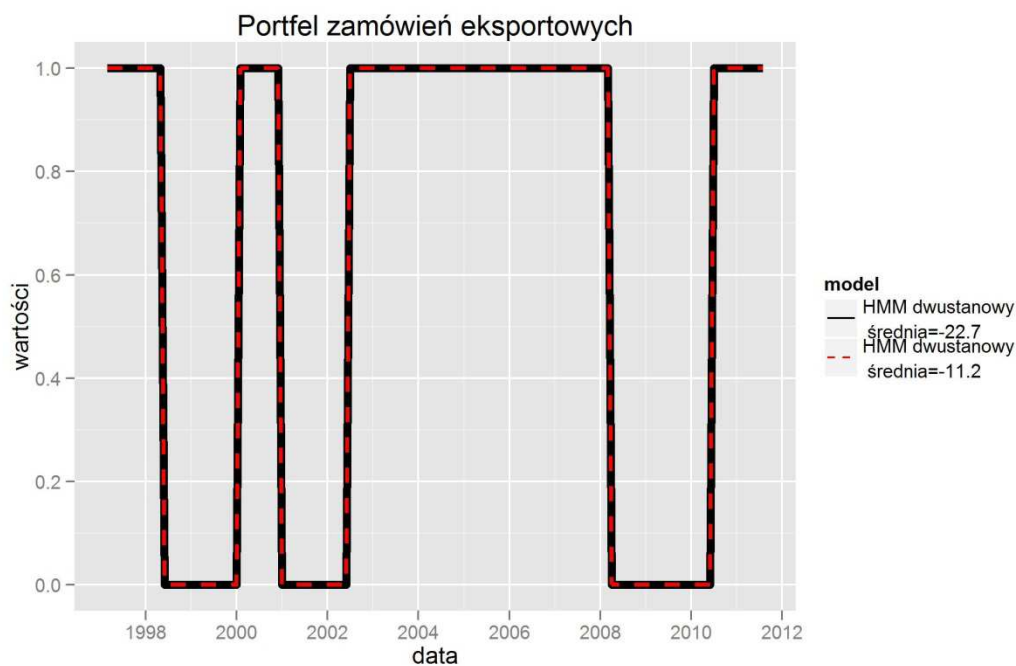
Nr pyt.	Treść pytania	Wartość średnia dla stanu 0	Liczba modeli w grupie	AIC	BIC
1	Wielkość produkcji	-7,3	9 982	1 077,5	1 099,6
		0,7	18	1 261,4	1 283,5
2	Portfel zamówień ogółem	-21,8	9 656	1 191,7	1 213,8
		-11,1	344	1 368,7	1 390,8
3	Portfel zamówień eksportowych	-22,7	9 997	1 191,4	1 213,5
		-11,2	3	1 356,9	1 379,0
4	Poziom zapasów produkowanych wyrobów	-1,5	9 998	829,1	851,2
		2,0	2	975,0	997,2
5	Ceny produkowanych wyrobów	-3,7	9 736	1 035,6	1 057,7
		3,3	264	1 238,1	1 260,2
6	Poziom zatrudnienia	-25,9	8 667	1 139,1	1 161,2
		-16,6	1 333	1 372,9	1 395,0
7	Sytuacja finansowa przedsiębiorstwa	-20,5	9 765	1 120,2	1 142,3
		-10,6	235	1 333,5	1 355,6
8	Ogólna sytuacja gospodarki polskiej	-44,8	9 852	1 415,6	1 437,7
		-20,6	148	1 610,9	1 633,1



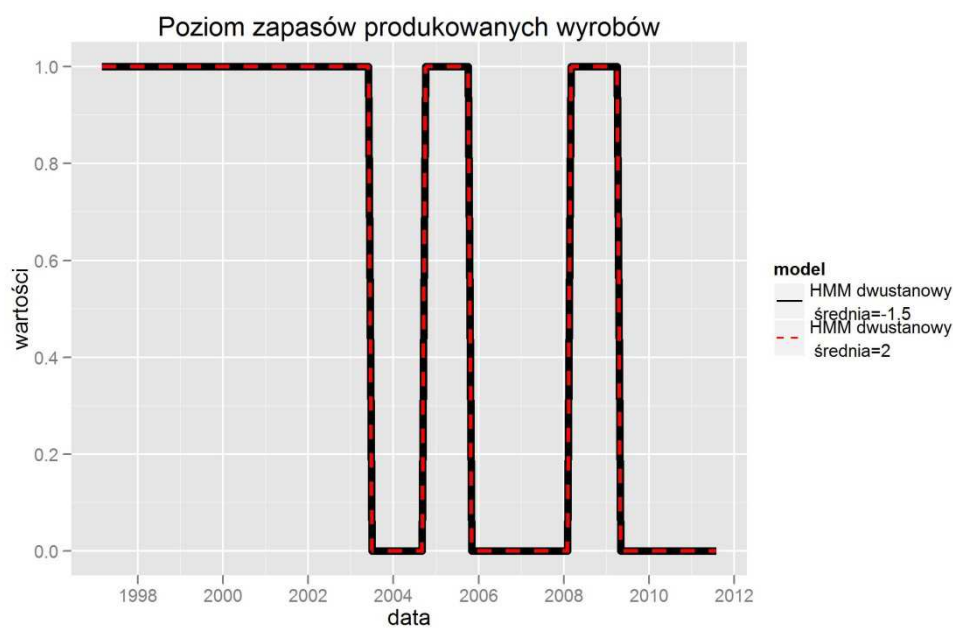
Rysunek 2 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek dwustanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o wielkość produkcji (pytanie 1).



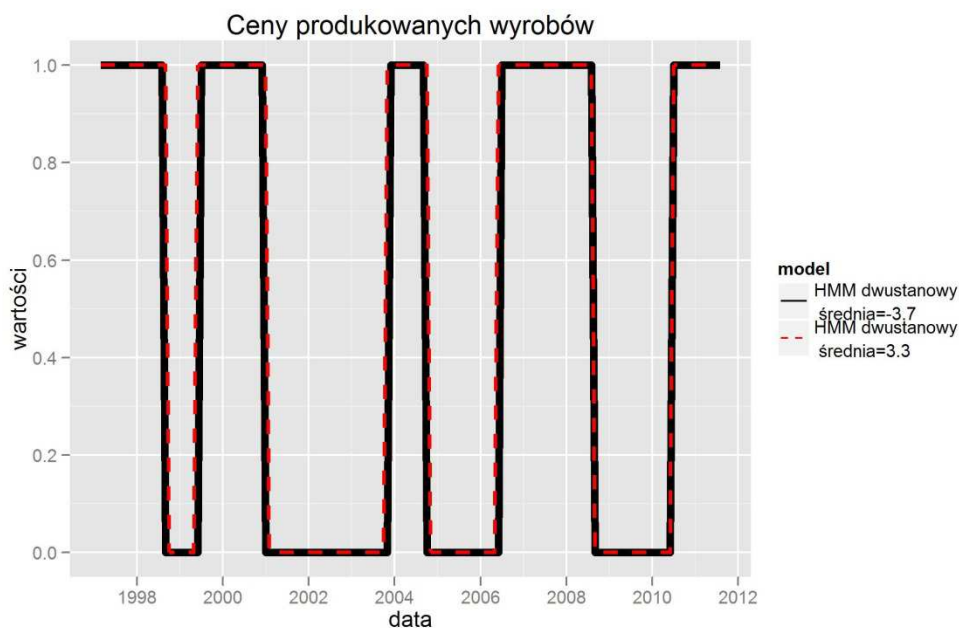
Rysunek 3 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek dwustanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o portfel zamówień ogółem (pytanie 2).



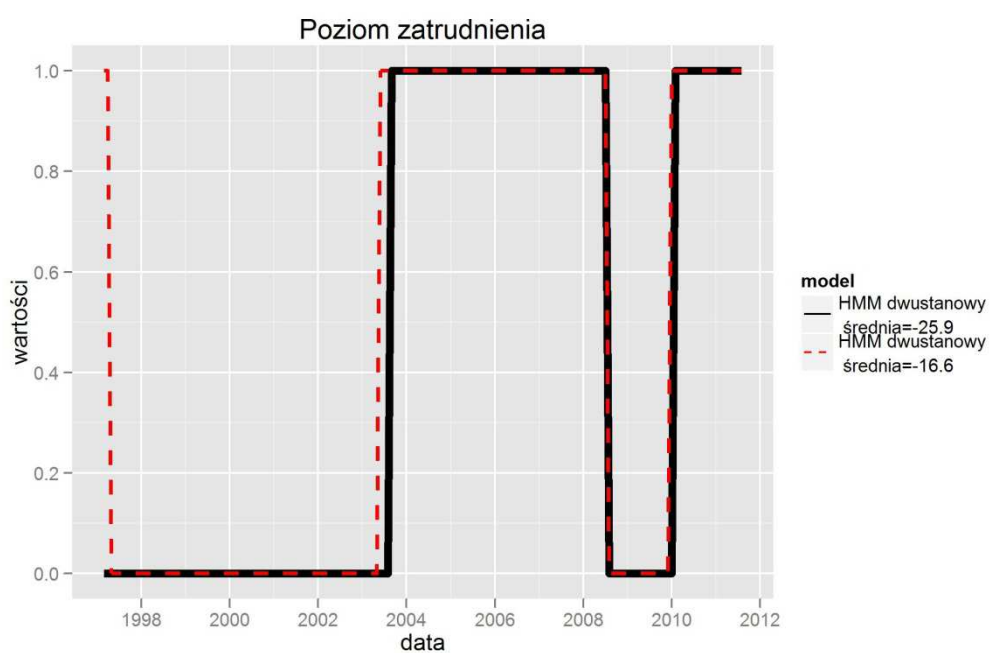
Rysunek 4 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek dwustanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o portfel zamówień eksportowych (pytanie 3).



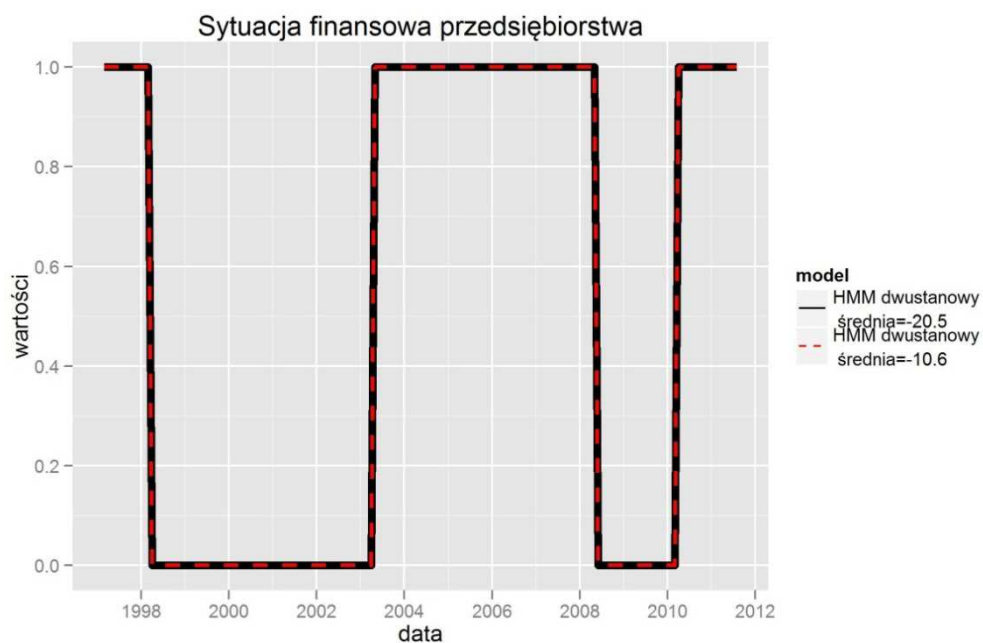
Rysunek 5 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek dwustanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o poziom zapasów produkowanych wyrobów (pytanie 4).



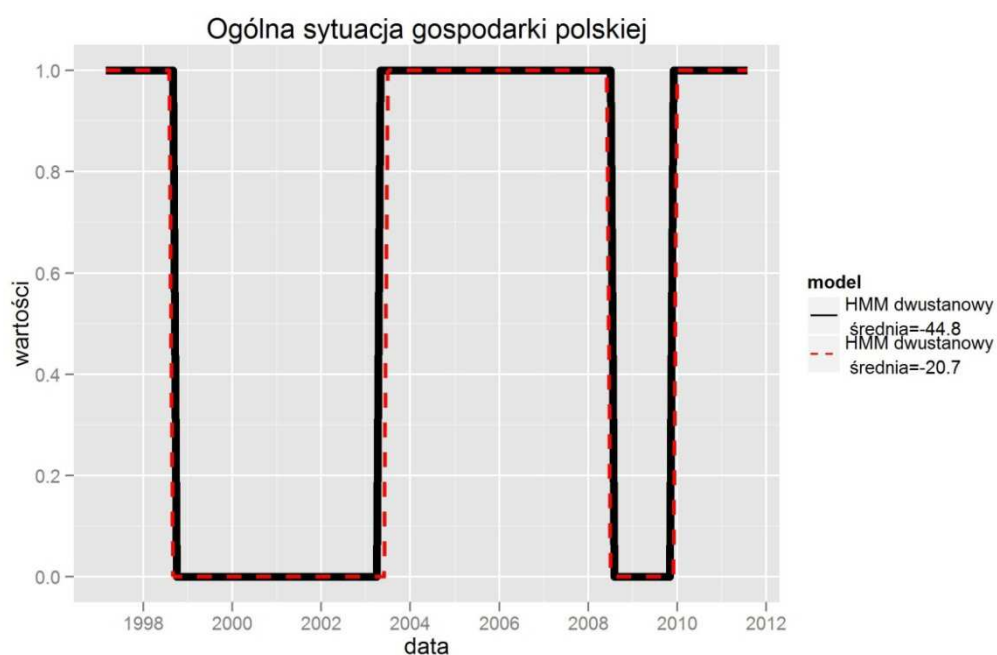
Rysunek 6 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek dwustanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o ceny produkowanych wyrobów (pytanie 5).



Rysunek 7 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek dwustanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o poziom zatrudnienia (pytanie 6).



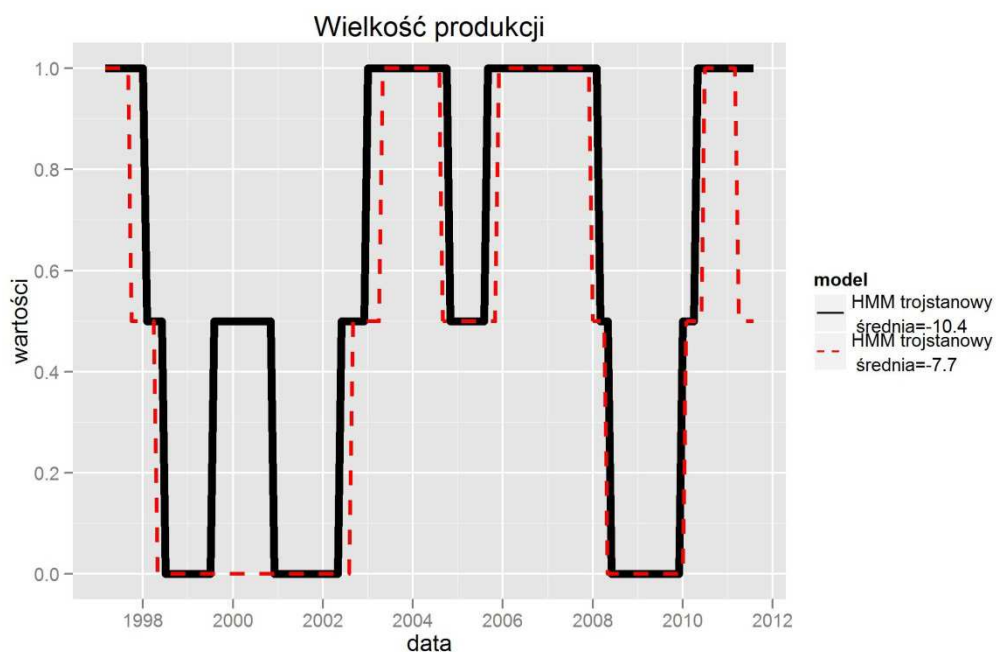
Rysunek 8 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek dwustanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o sytuację finansową przedsiębiorstwa (pytanie 7).



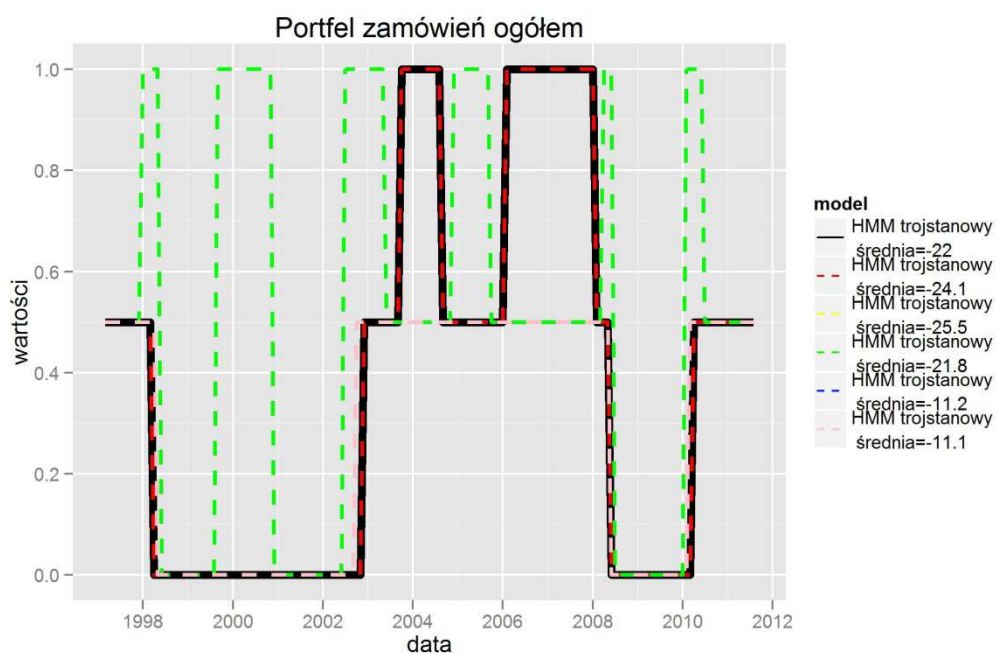
Rysunek 9 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek dwustanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o ogólną sytuację gospodarki polskiej (pytanie 8).

Tabela 2 Podział klasyfikacyjny trójstanowych ukrytych modeli Markowa ze względu na wartości średnie rozkładów warunkowych zaokrąglone do jednego miejsca po przecinku. Na szarym tle podane zostały parametry modeli uznanych przez najlepsze dla danego pytania.

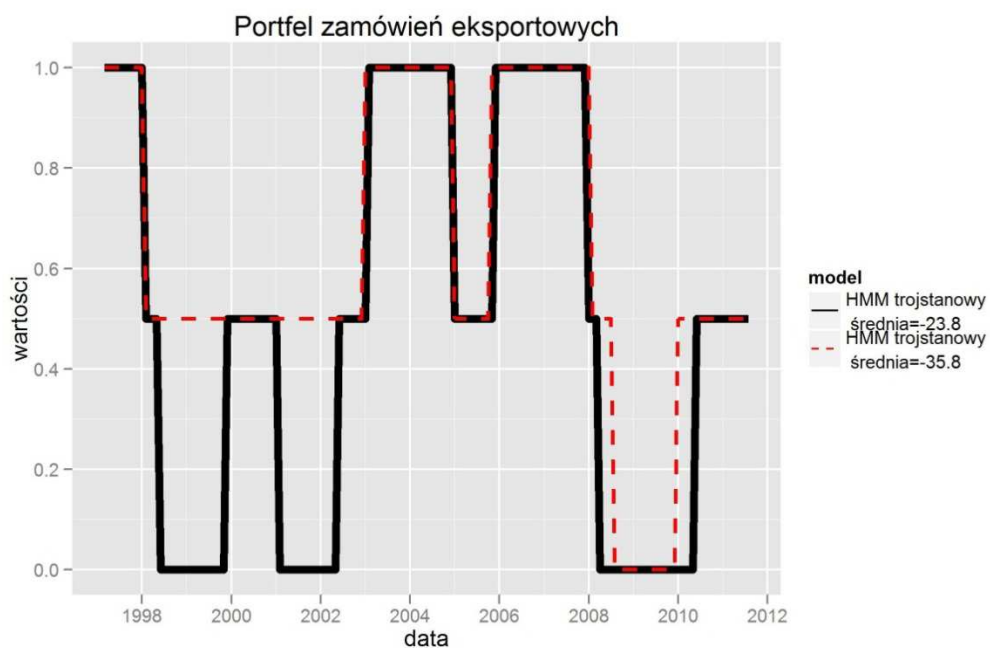
Nr pyt.	Treść pytania	Wartość średnia dla stanu 0	Liczba modeli w grupie	AIC	BIC
1	Wielkość produkcji	-10,4	5 717	1 003,3	1 047,5
		-7,7	4 283	1 015,7	1 060,0
2	Portfel zamówień ogółem	-25,5	6 528	1 117,6	1 161,9
		-24,1	57	1 116,6	1 160,9
		-22,0	3 392	1 106,3	1 150,5
		-21,8	3	1 205,7	1 250,0
		-11,1	20	1 382,7	1 426,9
3	Portfel zamówień eksportowych	-35,8	1 640	1 094,5	1 138,8
		-23,8	8 360	1 069,4	1 113,7
4	Poziom zapasów produkowanych wyrobów	-3,2	980	763,5	807,8
		-1,7	7 487	742,4	786,6
		-1,5	57	740,2	784,4
		-1,0	1 476	743,5	787,8
5	Ceny produkowanych wyrobów	-6,4	9 879	939,1	983,3
		3,3	121	1 252,1	1 296,3
6	Poziom zatrudnienia	-30,8	9 848	1 021,4	1 065,6
		-26,3	2	1 077,5	1 121,7
		-16,6	150	1 386,9	1 431,1
7	Sytuacja finansowa przedsiębiorstwa	-24,5	5 127	1 057,0	1 101,2
		-20,0	4 867	1 024,5	1 068,7
		-10,6	6	1 347,5	1 391,7
8	Ogólna sytuacja gospodarki polskiej	-57,5	1 812	1 359,5	1 403,7
		-46,2	8 187	1 326,1	1 370,3
		-20,6	1	1 624,9	1 669,2



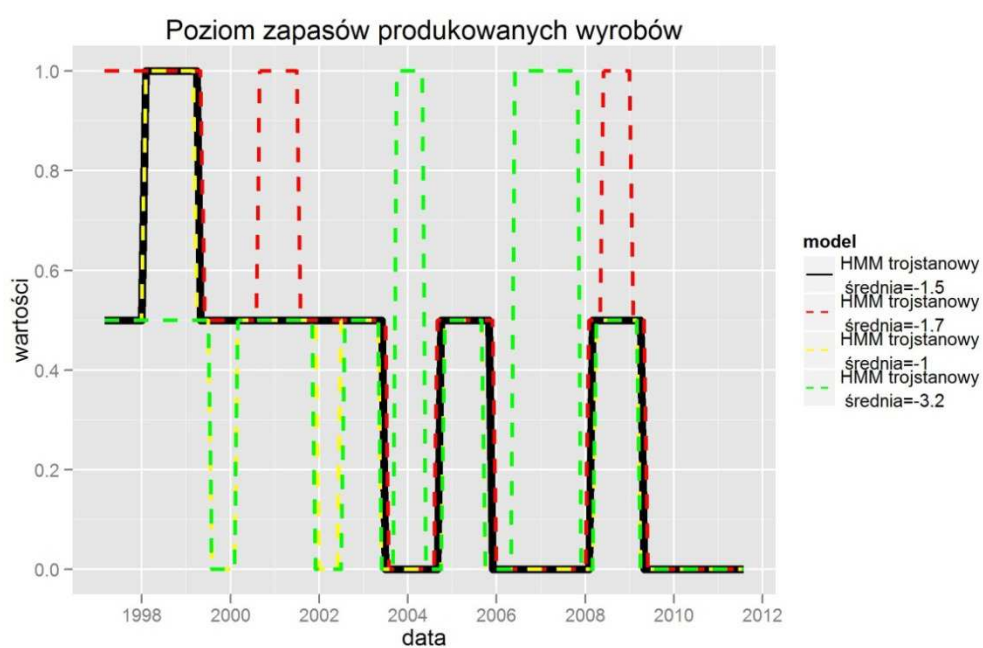
Rysunek 10 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek trójstanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o wielkość produkcji (pytanie 1).



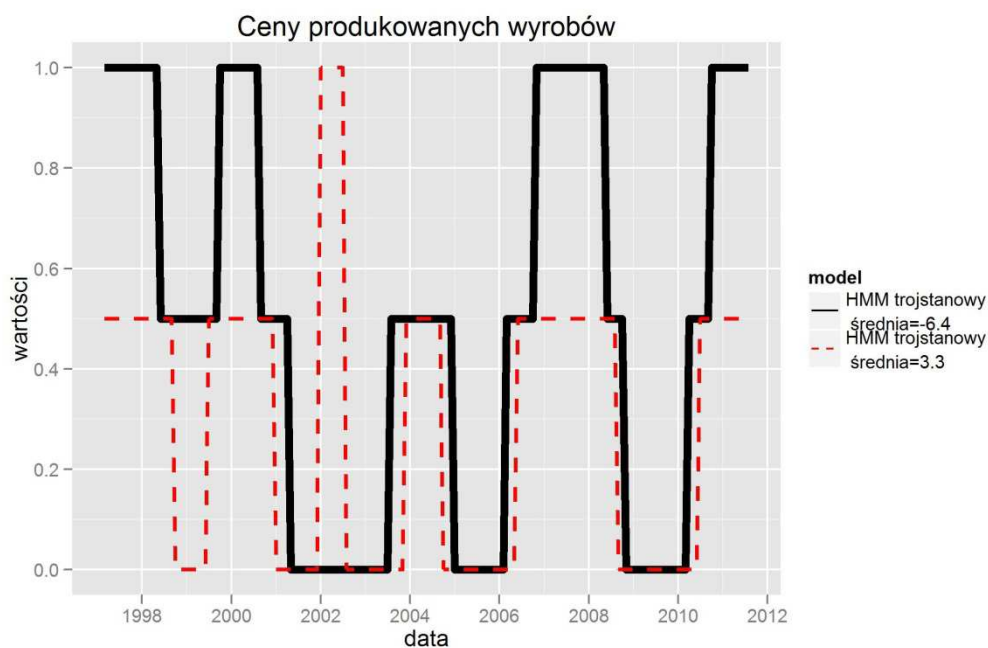
Rysunek 11 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek trójstanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o portfel zamówień ogółem (pytanie 2).



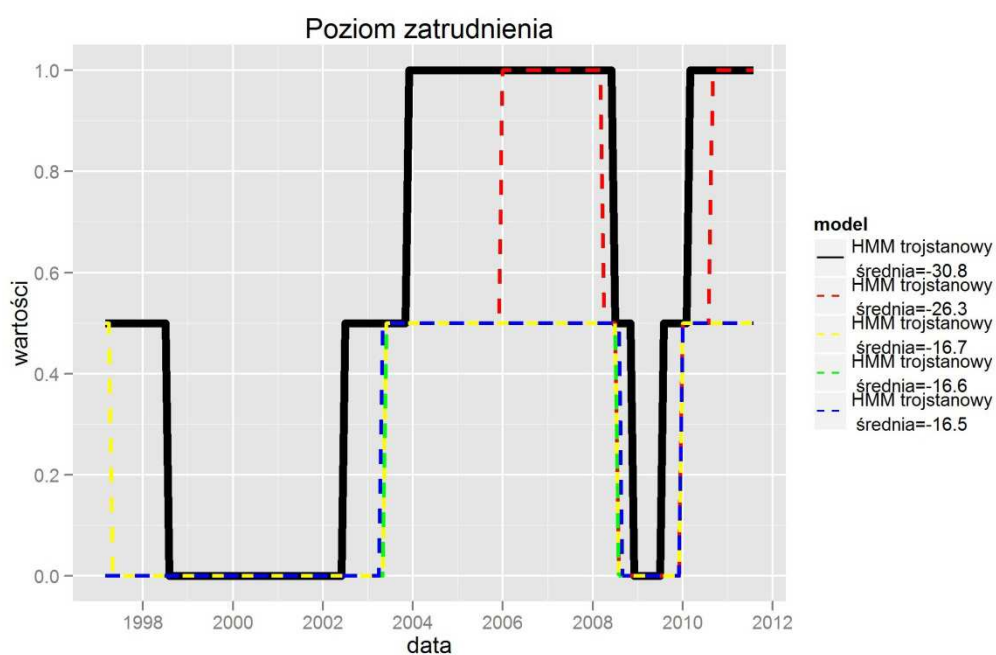
Rysunek 12 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek trójstanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o portfel zamówień eksportowych (pytanie 3).



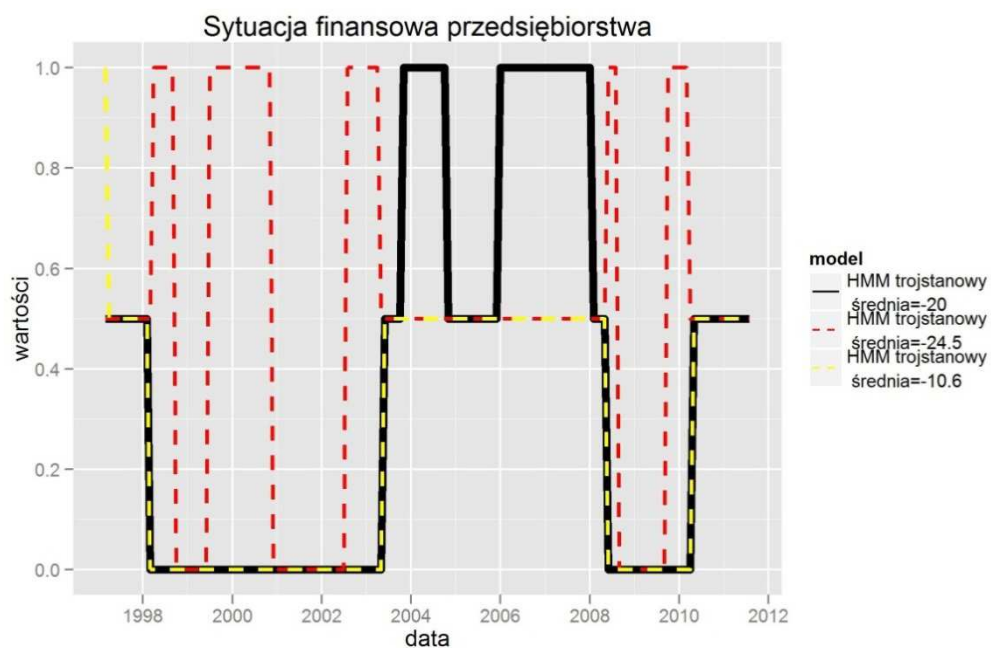
Rysunek 13 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek trójstanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o poziom zapasów produkowanych wyrobów (pytanie 4).



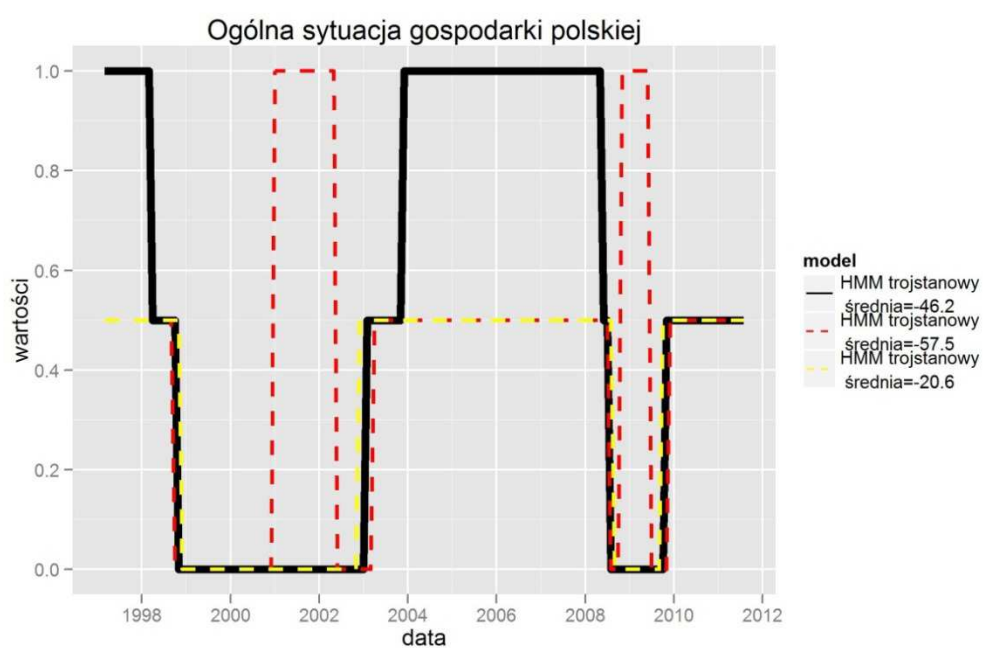
Rysunek 14 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek trójstanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o ceny produkowanych wyrobów (pytanie 5).



Rysunek 15 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek trójstanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o poziom zatrudnienia (pytanie 6).



Rysunek 16 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek trójstanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o sytuację finansową przedsiębiorstwa (pytanie 7).



Rysunek 17 Porównanie najbardziej prawdopodobnych ścieżek trójstanowych HMM z grup klasyfikacyjnych dla trendu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o ogólną sytuację gospodarki polskiej (pytanie 8).

6. Podsumowanie

Z przeprowadzonych analiz można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Dwustanowe ukryte modele Markowa dla trendu szeregu sald odpowiedzi na każde z ośmiu pytań są stabilne i w jednoznaczny sposób można wskazać parametry modelu najlepszego w rozpatrywanej klasie modeli HMM.
2. Trójstanowe ukryte modele Markowa dla trendu szeregu sald odpowiedzi na wszystkie pytania, poza pytaniem czwartym związanym z poziomem zapasów produkowanych wyrobów, należy uznać za stabilne.
3. Trójstanowy ukryty model Markowa związany z danymi dla pytania czwartego nie jest numerycznie stabilny i algorytm Bauma-Welcha dla większości punktów startowych nie zbiega do maksimum globalnego. Najczęściej osiągnane maksimum lokalne nie odbiega jednak znacznie od maksimum globalnego.
4. Stabilność modeli dwustanowych jest wyraźnie większa od stabilności modeli trójstanowych.

Literatura

- [Baum 1970] Baum L. E., Petrie T., Soules G., Weiss N., *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains*, Ann. Math. Statist., vol. 41, no. 1, 1970
- [Bernardelli 2012] Bernardelli M., Dędyś M., *Ukryte modele Markowa w analizie wyników testu koniunktury gospodarczej*, w recenzji
- [Cappé 2005] Cappé O., Moulines E., Rydén T., *Inference in Hidden Markov Models*, Springer Series in Statistics, 2005
- [Cleveland 1990] Cleveland R. B., Cleveland W. S., McRae J.E., Terpenning I. *STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess*. Journal of Official Statistics, 1990, vol. 6
- [Tiuryn 2006] Tiuryn J., *Wstęp do obliczeniowej biologii molekularnej*, seria wykładów na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, 2006
- [Viterbi 1967] Viterbi A., *Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm*, IEEE Transactions on Information Theory, 1967, vol. 13